CONCURSO FORTUNY MATEMÁTICAS. NIVEL 3

Ejercicio 1

a) Dado A (16, 22) y B(-4, -8) calcular C, tal que $BC = \frac{1}{4}CA$

b) Por C trazamos un vector perpendicular a AB, DE, tal que $DC = \frac{1}{5}DE$ con medida $CD = 4\sqrt{2}$

c) Hallamos sobre este segmento un punto F, tal que $CF = 3FE$

d) Unimos F con el punto G, donde G cumple la relación $BG = 4GA$

e) Trazamos por H (punto medio de C y A) una paralela a DE que corta en el punto I a GF

Se pide: a) Hallar las coordenadas de los puntos C, D, E, F, G, H, I

b) Hallar el área de la figura CHFI

Ejercicio 2

a) Comprobar que para x, y > 0 se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^8 \geq 64xy(x+y)^2$$

b) Si 1, α y α^2 son las raíces cúbicas de la unidad, probar que

i) $\left(1+\alpha^2\right)^4 = \alpha$

ii) $\left(1-\alpha\right)\left(1-\alpha^2\right)\left(1-\alpha^4\right)\left(1-\alpha^5\right) = 9$

Ejercicio 3

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta = 3229 \\ \beta a + \gamma b + \delta c + \alpha = 1946 \\ \gamma a + \alpha b + \beta c + \delta = 3839 \\ \gamma a + \delta b + \beta c + \alpha = 3986 \end{cases}$$